Descriptions des écoulements

Questions de cours

Pour apprendre le cours : vérifiez que vous savez répondre à chaque question.

1. Quelles sont les deux approches pour décrire un écoulement ?
2. Qu'est-ce qu'un écoulement stationnaire ?
3. Qu'est-ce qu'une ligne de champ ? Un tube de champ ?
4. Définir le débit massique. Donner son expression faisant intervenir la vitesse du fluide. (+ SF1)
5. Définir le débit volumique et donner son expression faisant intervenir la vitesse du fluide. Sous quelle(s) hypothèse(s) est-il proportionnel au débit massique ? Quel est alors le coefficient de proportionnalité ?
6. Définir la vitesse débitante.
7. Sous quelle(s) hypothèse(s) le débit massique se conserve-t-il ? Même question pour le débit volumique. Démontrer ce résultat.
8. Comment peut-on lier les débits d'entrée et ceux de sortie dans un système à plusieurs entrées et sorties si le débit massique se conserve ?
9. Pour un écoulement incompressible en conduite, comment varie la vitesse si la section de la conduite diminue ?
10. Définir la force visqueuse. En quelle unité s'exprime la viscosité dynamique ? Donner des ODG pour l'eau, l'air et l'huile.
11. Définir un écoulement parfait et un fluide parfait.
12. Que peut-on dire de la vitesse d'un fluide au contact avec une paroi ? Si en plus l'écoulement est visqueux ?
13. Définir écoulement laminaire et turbulent. Définir le nombre de Reynolds.

Exercices de cours - Savoirs-Faire - Gymnastique

SF 1 - Calculer un débit massique

On considère une conduite cylindrique d'axe (Ox) de rayon R constant. L'écoulement est supposé incompressible. Calculer le débit massique si :

1. Le profil de vitesse est donné par $\forall M \in \mathcal{S}$, $\overrightarrow{v}(M) = v_0\overrightarrow{u_x}$
2. Le profil de vitesse est donné par $\forall M \in \mathcal{S}$, $\overrightarrow{v}(M) = v_0\left(1 - \dfrac{r^2}{R^2}\right)\overrightarrow{u_x}$ où r est la variable en coordonnées cylindriques.

Gymnastique - Autour du débit

Le débit moyen annuel de la Seine à l'entrée de Paris (juste après la confluence avec la Marne) est d'environ 330 m^3/s, avec une vitesse débitante de 2 km/h.

Estimer la section du fleuve à cet endroit.
Sachant que la largeur de la Seine à l'entrée de Paris est estimée à 165 m, quelle y est la profondeur moyenne ?

Gymnastique - Force de viscosité

On considère un écoulement au dessus d'une surface solide définissant le plan $y = 0$. Le champ de vitesse de l'écoulement est donné par $v(y) = ky\overrightarrow{u_x}$ avec $k > 0$.
Représenter la situation sur un schéma et calculer la force de viscosité exercée par le fluide sur une surface $\mathcal{S}$ de la paroi.

Exercices phares

Exercice 1 - Sténose artérielle

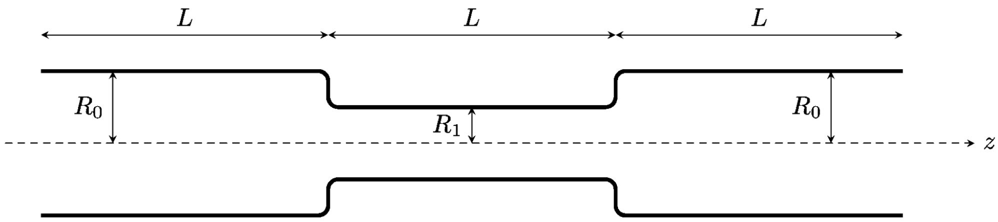
On étudie la ciruclation sanguine dans une artère, modélisée par un écoulement stationnaire dans un cylindre de longueur $L_0 = 7$ cm et de rayon $R_0 = 0,7$ cm. Le sang est modélisé par un fluide newtonien de viscosité $\eta = 6.10^{-3}$ Pa.s. L'écoulement au sein de l'artère a un profil de type Poiseuille : en coordonnées cylindriques,

$$\overrightarrow{v} = \frac{\varDelta P R_0^2}{4\eta L_0}(1 - ar^2)\overrightarrow{u_z}$$

où $\varDelta P$ est la différence de pression entre les deux extrémités de l'artère. Sa vitesse débitante vaut $U = 10$ cm/s.

1. Déterminer a.
2. En déduire la valeur de $\varDelta P$.
3. On définit la résistance hydraulique de l'artère à partir de la différence de pression et du débit volumique Q par $R_H = \dfrac{\Delta P}{Q}$. Justifier cette dénomination par analogie avec d'autres phénomènes connus, puis exprimer R_H en fonction des données du problème.

On s'intéresse à une sténose artérielle, dont l'effet est de réduire le rayon de l'artère. On la modélise par la configuration de la figure ci-dessous, en prenant $R_1 = \dfrac{R_0}{2}$.



4. Déterminer les expressions des résistances hydrauliques R_H d'une section saine de longueur L et R'_H d'une section sténosée.
5. Montrer que la résistance hydraulique de l'artère complète est $R_{Htot} = 2R_H + R'_H$ et la calculer en fonction des paramètres physiques.
6. Comparer les débits volumiques avec et sans sténose pour l'artère étudiée. Commenter.

Un pontage artériel consiste à créer un écoulement en parallèle de la sténose en utilisant une tubulure de rayon R_2 et de même longueur $3L$ afin de retrouver le débit initial.

7. En déduire le rayon R_2 nécessaire pour réaliser ce pontage.

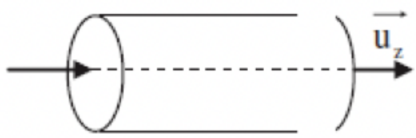
Exercice 2 - Glissement sur un plan incliné lubrifié

On étudie le glissement d'un solide de masse m sur un plan incliné d'un angle α. Ce plan est lubrifié par une fine couche (épaisseur e constante et uniforme) d'un fluide visqueux (viscosité η) sur laquelle glisse le solide. On suppose que le champ de vitesse dans le fluide entre la masse et le plan incliné est linéaire.

1. Donner l'expression du champ de vitesse dans la couche de fluide en fonction de la vitesse V de la masse.
2. En déduire l'expression de la force de viscosité subie par la masse.
3. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse V de la masse et en déduire la vitesse limite atteinte.

Exercices en plus

Exercice 3 - Ecoulement sanguin



- ▷ Un liquide visqueux newtonien incompressible (masse volumique ρ, viscosité dynamique η) s'écoule dans un tuyau cylindrique horizontal de rayon R et de longueur L.
- ▷ Le régime d'écoulement est laminaire et stationnaire avec un débit volumique D_v.
- ▷ La vitesse en un point situé à la distance r de l'axe du tuyau, de symétrie axiale, obéit à la loi : $\overrightarrow{V}(r) = B\left(1 - \left(\frac{r}{R}.\right)^2\right)\overrightarrow{u_z}$
- ▷ Le nombre de Reynolds s'écrit $Re = \dfrac{2V_m\rho R}{\eta}$, V_m étant la vitesse moyenne du fluide dans une section droite du tuyau.

Les données sont : ρ, η, R, L et le débit volumique D_v.

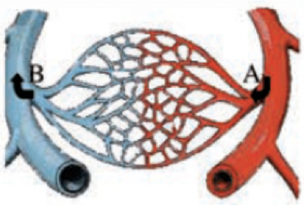
4. Expliciter le coefficient B en fonction des données.

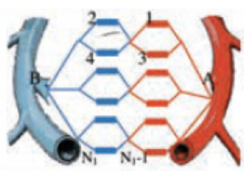
Le module de la force F tangentielle exercée par le fluide, à cause de sa viscosité, sur la paroi interne du tuyau, est : $F = 8\eta \dfrac{L}{R^2} D_v$.

5. Démontrer cette relation en précisant clairement le raisonnement.
6. Préciser sur un schéma le sens de cette force.
7. Le maintien du mouvement stationnaire du fluide nécessite une différence entre la pression à l'entrée du tuyau (P_e) et la sortie (P_s) : $P_e - P_s = \dfrac{F}{\pi R^2}$. En déduire l'expression $P_e - P_s = R_h.D_v$ et expliciter la résistance à l'écoulement R_h en fonction des données.

Le sang est un liquide incompressible visqueux circulant dans le corps à travers un réseau d'artères, artérioles, capillaires, veinules, veines.
Les échanges biochimiques se font à travers le réseau capillaire d'un organe pour lequel on mesure :

- En A : pression moyenne $P_A = 4,0.10^3$ Pa pour un débit volumique $D_{VA} = 1,8$ L/min ;
- En B : $P_B = 1,6.10^3$ Pa.





8. Déterminer, à partir de la relation trouvé en question 6, la résistance totale R_{hAB} à l'écoulement entre A et B, en utilisant les unités (à préciser) du système international.
9. La figure ci-avant représente un modèle ramifié du réseau capillaire. En moyenne, chaque vaisseau capillaire possède une longueur $L = 1$ mm, un rayon $r = 3\,\mu$m, une résistance à l'écoulement $R_{hcap} = 1,2.10^{19}$ SI.
   Evaluer littéralement le nombre N_1 de capillaires de ce modèle ramifié (sur la figure ci-avant, chaque trait épais représente 1 capillaire) en fonction de R_{hAB} et R_{hcap}.

Exercice 4 - Ecoulement dans une conduite de section variable

Exercice d'entrainement pour des calculs de débit

Un fluide s'écoule de manière incompressible et en régime stationnaire dans un tuyau cylindrique d'axe (Oz) et de rayon R_0. Le champ de vitesse dans le cylindre vérifie : $\vec{v} = v_0 \left(1 - \dfrac{r}{R_0}\right) \vec{u_z}$

1. Tracer l'allure de la carte de champ dans le tuyau.
2. Calculer le débit volumique dans le tuyau et en déduire la vitesse moyenne sur une section.

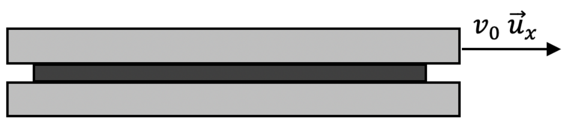
Le tuyau n'est plus de section constante et l'écoulement n'est plus incompressible, le rayon vérifie $R(z) = R_0 \left(1 + \dfrac{z^2}{e^2}\right)$ où e est une constante. On suppose que la masse volumique ne dépend que de z et qu'en $z = 0$ elle vaut μ_0. L'expression de la vitesse reste valable en remplaçant R_0 par $R(z)$.

3. En déduire l'expression de la masse volumique en fonction de z.

Exercice 5 - Lubrification

Exercice d'entrainement sur la manipulation de la force de viscosité

Un fluide newtonien est réparti sur une hauteur e entre deux plaques très longues. La plaque du dessous est immobile et celle du dessus possède la vitesse v_0.



1. Quelles sont les conditions aux limites vérifiées par l'écoulement ?
2. On suppose que la vitesse évolue de manière affine en fonction de l'axe z (vertical ascendant). Donner l'expression de la vitesse.
3. Quelle est la composante horizontale de la force exercée par le fluide, par unité de surface, sur la plaque supérieure ?

Exercice 6 - Faut-il courir sous la pluie ?

Exercice plus original

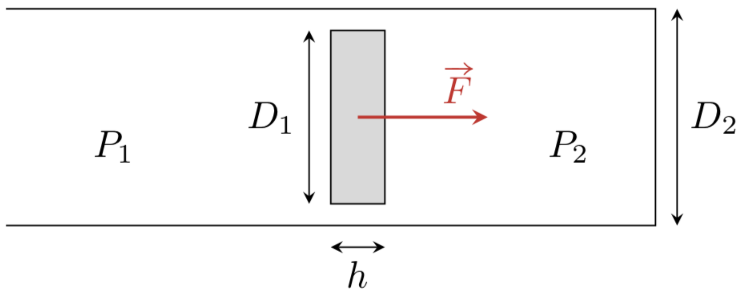
La pluie, assimilée à un milieu continu de masse volumique ρ, tombe verticalement avec la vitesse $-U\overrightarrow{u_z}$ ($U > 0$). Une personne est assimilée à un parallélépipède de dimension $h \times L \times \ell$, où h est la hauteur de la personne, L est sa largeur d'épaules et ℓ est son épaisseur du dos jusqu'au ventre.
La personne, qui n'a ni parapluie ni vêtements imperméables, doit parcourir une distance d dans la direction horizontale .

1. En supposant que cette personne se déplace à une vitesse constante $\overrightarrow{v} = v\overrightarrow{u_x}$ ($v > 0$), quelle est la masse d'eau qu'elle reçoit au cours de son trajet ?
2. A quelle vitesse doit-elle se déplacer si elle veut être le moins mouillé possible ? Interpréter ce résultat.

Exercice pour aller plus loin ⋆⋆⋆

Exercice 7 - Déplacement d'un piston à huile

On considère un piston formé d'un cylindre plein (diamètre D_1, épaisseur h) coulissant dans un cylindre creux (diamètre $D_2 > D_1$). Le fluide à l'intérieur du piston est de l'huile de masse volumique μ et de viscosité η. On suppose $P_2 = 2P_1$. Un opérateur appuie de manière quasi-statique sur le piston avec une force F.



1. Estimer simplement le gradient de pression GP dans l'interstice défini comme le rapport de la différence de pression sur la longueur de l'interstice.

2. On admet que la vitesse débitante du fluide dans l'interstice s'écrit $v_d = \alpha GP/\eta$, où α est une constante dépendant uniquement des diamètres. Déterminer le débit volumique de fuite.
3. Estimer la force de frottement visqueux sur le piston.
4. En déduire la force que doit exercer l'opérateur pour pouvoir pousser le piston.

Exercice 8 - Démonstration du profil de Poiseuille

Cet exercice s'intéresse à l'écoulement d'un fluide visqueux (viscosité η) dans une conduite cylindrique horizontale de rayon R et de longueur L, imposé par une différence de pression ΔP imposée entre les deux extrémités de la conduite. L'écoulement est supposé stationnaire, incompressible et laminaire.

Une étude locale permet de montrer que si on se place en coordonnées cylindriques, on a $\overrightarrow{v}(M,t) = v(r)\overrightarrow{u_z}$

Nous allons étudier le mouvement d'un système fermé (Σ) constitué d'un cylindre de fluide de rayon $r < R$ et de longueur dz infinitésimale centré sur l'axe de la conduite.

Hypothèses de travail :

- ▷ le poids de (Σ) est négligeable devant les autres actions mécaniques qu'il subit ;
- ▷ le champ de pression P dans la conduite est fonction de z uniquement : $P = P(z)$

1. Exprimer la force de pression $d\overrightarrow{F}_p$ s'exerçant sur (Σ) en fonction de $\dfrac{dP}{dz}$
2. Exprimer la force visqueuse $d\overrightarrow{F}_{visc}$ s'exerçant sur (Σ) en fonction de $\dfrac{dv_z}{dr}$
3. En déduire que les champs de vitesse et de pression sont reliés par
$$\frac{dv_z}{dr} = \frac{r}{2\eta}\frac{dP}{dz}$$
4. Montrer à partir de cette équation que le gradient de pression $\dfrac{dP}{dz}$ est constant. Donner sa valeur en fonction de ΔP et L.
5. Identifier une condition limite et déterminer complètement le champ de vitesse.